III. Moment d'inertie

III.1. Moment d'inertie d'un système discret

Le moment d'inertie d'un système discret étant constitué de N points matériels Mi de masse m_i par rapport à un axe (Δ) est noté I_Δ, son expression est:

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Où r_i est la distance du point M_i de masse m_i à l'axe (Δ).

III.2. Moment d'inertie d'un système continu

Le moment d'inertie d'un système continu (S) de masse m et de densité volumique de masse ρ par rapport à un axe (Δ) est noté I_Δ, son expression est:

$$I_\Delta = \iiint_V r^2 dm = \iiint_V \rho r^2 dv$$

Où $r = MH$ est la distance d'un point M du (S) à l'axe (Δ), H est la projection de M sur (Δ).

Le moment d'inertie du système continu (S) par rapport à un point A est noté I_A son expression est :

$$I_A = \iiint_V r^2 dm = \iiint_V \rho r^2 dv$$

Où $r = AM$ est la distance entre A et M étant un point du système.

Le moment d'inertie du système continu (S) par rapport à un point A est noté I_A

III.3. Moment d'inertie par rapport aux axes d'un repère cartésien

Soit le repère cartésien $\Re(O, x, y, z)$ et (S) un système continu de masse m et de densité volumique de masse ρ, on considère un point $M(x, y, z)$ du (S) Figure 4.

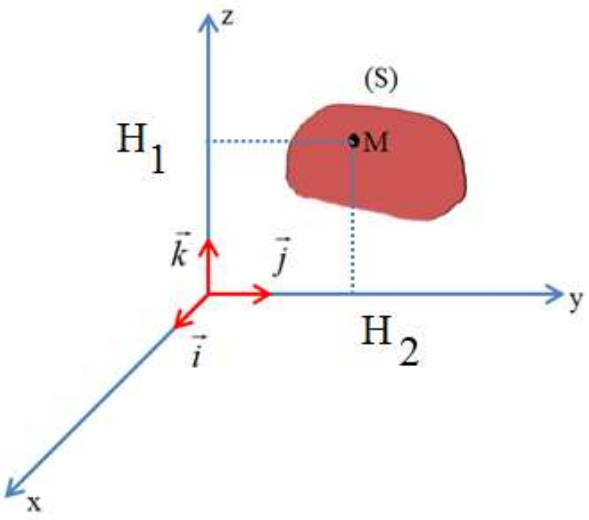

Figure 4 : Moments d'inertie par rapport aux axes du repère cartésien $\Re(O,\ x,\ y,\ z)$

Le moment d'inertie du (S) par rapport à l'axe $(O,\ \vec{i})$ est:

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2) dm$$

Le moment d'inertie du (S) par rapport à l'axe $(O,\ \vec{j})$ est:

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2) dm$$

Le moment d'inertie du (S) par rapport à l'axe $(O,\ \vec{k})$ est:

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2) dm$$

Le moment d'inertie du (S) par rapport à l'origine du repère est :

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

III.4.Théorème de Huyghens

Le théorème de Huyghens permet de calculer le moment d'inertie d'un système continu (S) par rapport à un axe $(A,\ \vec{u})$ étant parallèle à l'axe $(G,\ \vec{u})$ qui passe par le centre d'inertie G du (S) Figure 5.

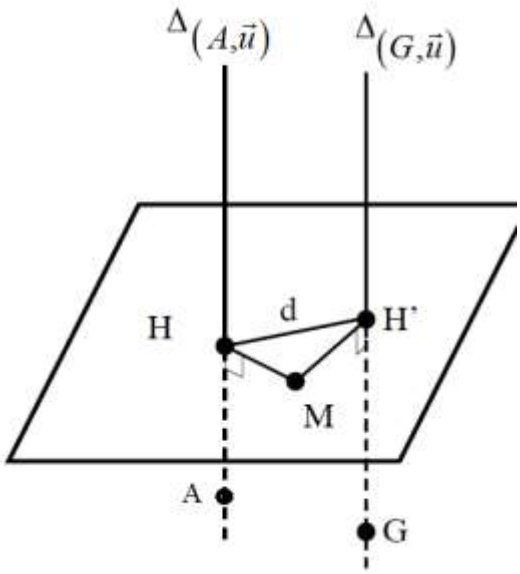

Figure 5 : Théorème de Huyghens

Enoncé du théorème : le moment d'inertie d'un système continu (S) de masse m par rapport à un axe $(A, \vec{u})$ qui est parallèle à l'axe $(G, \vec{u})$ qui passe par le centre d'inertie G du (S) est donné par :

$$I_{(A,\vec{u})} = I_{(G,\vec{u})} + md^2$$

Remarque

- ✓ On peut le démontrer facilement avec la définition de moment d'inertie par rapport à un axe et avec la formule de Shell.
- ✓ Le théorème de Huyghens s'applique uniquement à partir du moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre d'inertie du système.

IV. Opérateur d'inertie

IV.1. Opérateur d'inertie en un point O

Le moment d'inertie d'un système continu (S) de masse m par rapport à un axe (Δ) $(O, \vec{u})$ passant par O et $\vec{u}$ son vecteur directeur (Figure 6) est:

$$I_{(O,\vec{u})} = \iiint_V \overrightarrow{MH}^2 dm$$

Où H est la projection de M sur l'axe $\Delta(O,\ \vec{u})$

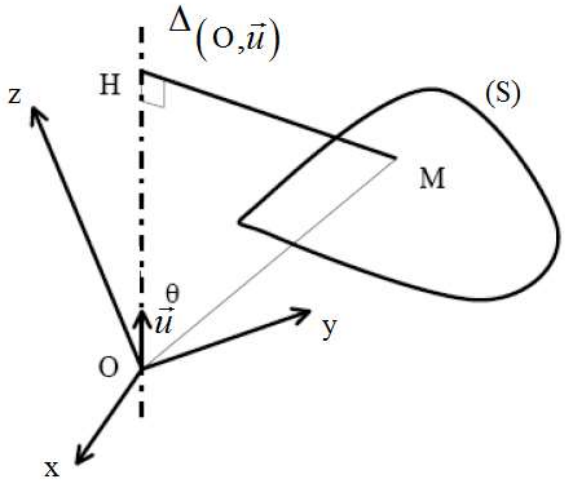

Figure 6 : Moment d'inertie d'un système (S) par rapport un axe $\Delta(O,\ \vec{u})$

D'autre part, dans le triangle OHM rectangle en H.

$$MH = |OM.sin(\theta)| = \left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right\|$$

Alors,

$$\begin{aligned} MH^2 &= \left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right\|.\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right\| \\ &= \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right).\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right) \end{aligned}$$

Permutation du produit mixte,

$$\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right).\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right) = \overrightarrow{OM}.\left(\vec{u} \wedge \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right)\right) = \vec{u}.\left(\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

Enfin,

$$I_{(O,\vec{u})} = \iiint_V \overrightarrow{MH}^2 dm = \iiint_V \vec{u}.\left(\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm$$
$$= \vec{u}.\iiint_V \left(\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm$$
$$= \vec{u}.I_O\left(\vec{u}\right)$$

Alors, le moment d'inertie $I_{(O,\vec{u})}$ du système (S) par rapport à l'axe $\Delta(O, \vec{u})$ est la projection sur le vecteur $\vec{u}$ d'un vecteur $I_O(\vec{u})$ qui s'appelle l'opérateur d'inertie en O appliqué au vecteur $\vec{u}$.

$$I_{\Delta(O,\vec{u})} = \vec{u}.I_O\left(\vec{u}\right)$$

Où, $$I_O\left(\vec{u}\right) = \iiint_V \left(\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{OM}\right) dm$$

<u>Propriétés</u>

Opérateur d'inertie I_P en un point P, $I_P : \vec{u} \to I_P(\vec{u}) = \iiint_V \left(\left(\overrightarrow{PM} \wedge \vec{u}\right) \wedge \overrightarrow{PM}\right) dm$ est :

- ✓ **Linéaire**

Quels que soient α et β deux réels et quels que soient $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ de l'espace vectoriel euclidien, $I_P\left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right) = \alpha I_P\left(\vec{u}\right) + \beta I_P\left(\vec{u}\right)$

- ✓ **Symétrique**

Quels que soient $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ de l'espace vectoriel euclidien, $\vec{u}.I_P\left(\vec{v}\right) = \vec{v}.I_P\left(\vec{u}\right)$

IV.2. Matrice d'inertie d'un système en un point P

L'opérateur d'inertie en point P, $I_P : \vec{u} \to I_P(\vec{u})$ est symétrique et linéaire. Par conséquent, il peut se représenter dans une base donnée par une matrice symétrique $\Pi_P(S)$ qui s'appelle matrice d'inertie ou tenseur d'inertie du solide (S) au point P.

IV.3. Eléments de la matrice d'inertie d'un système

Les éléments de la matrice d'inertie d'un système (S) en un point O dans une base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ du repère cartésien $\Re\left(O,x,y,z\right)$ sont :

$$\Pi_O(S)=\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})} = \begin{pmatrix} \int_V (z^2+y^2)\,dm & -\int_V xydm & -\int_V xzdm \\ -\int_V xydm & \int_V (z^2+x^2)\,dm & -\int_V yzdm \\ -\int_V xzdm & -\int_V yzdm & \int_V (y^2+x^2)\,dm \end{pmatrix}_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}$$

Les éléments diagonaux I_{xx}, I_{yy} et I_{zz} s'appellent les moments d'inertie et représentent respectivement les moments d'inertie du système (S) par rapport aux axes (Ox), (Oy) et (Oz) leurs expressions sont données par.

$$I_{xx} = {}^t\vec{i}.\Pi_O.\vec{i}\ ,\ I_{yy} = {}^t\vec{j}.\Pi_O.\vec{j} \text{ et } I_{zz} = {}^t\vec{k}.\Pi_O.\vec{k}$$

Les éléments non- diagonaux I_{xy}, I_{xz} et I_{yz} s'appellent les produits d'inertie et leurs expressions sont données par.

$$I_{xy} = {}^t\vec{i}.\Pi_O.\vec{j}\ ,\ I_{xz} = {}^t\vec{i}.\Pi_O.\vec{k} \text{ et } I_{yz} = {}^t\vec{j}.\Pi_O.\vec{k}$$

De plus, $I_O(\vec{u})$ l'opérateur d'inertie du système en O appliqué au vecteur $\vec{u}$ peut être calculé par la formule suivante :

$$I_O(\vec{u}) = \Pi_O(S).\vec{u}$$

IV.2. Axes principaux d'inertie

La matrice d'inertie est réelle et symétrique, par conséquent elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Ainsi qu'elle possède trois vecteurs propres qui sont orthogonaux deux à deux, et leurs supports sont appelés les axes principaux d'inertie. Ces trois vecteurs propres forment une base principale d'inertie. Un repère associé à une base principale s'appelle repère principal.

- ✓ Les axes principaux d'inertie représentent les axes de symétrie du système
- ✓ Dans un repère principal d'inertie, d'origine O la matrice d'inertie du système en O est diagonale et s'écrit dans la base de ce repère **(base principale)** sous la forme suivante:

$$\Pi_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(base\ \text{principale})}$$

<u>Propriétés des repères principaux</u>

1. Si le système possède un axe de symétrie matérielle alors cet axe est un axe principal d'inertie pour ce système.
2. Si le système possède un plan de symétrie matérielle alors tout axe perpendiculaire à ce plan est axe principal d'inertie pour ce système.
3. Tout trièdre a deux axes de symétrie matérielle pour un système donné. Il est un repère principal pour ce système et sa matrice d'inertie en O et dans la base de ce repère **(base principale)** est de la forme:

$$\Pi_O(S) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(x,\,y,\,z)}$$

4. Si un système admet un axe de symétrie (Oz) de révolution pour sa distribution de masse, alors tout trièdre orthogonal incluant cet axe de révolution est un repère principal d'inertie pour ce système. Le système est dit cylindrique et sa matrice d'inertie en O et dans la base de ce repère **(base principale)** est de la forme :

$$\Pi_O(S) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I' \end{pmatrix}_{(x,\,y,\,z)}$$

5. Symétrie sphérique

Si le système possède la symétrie sphérique, si seulement si tout axe issu du centre de masse est un axe de symétrie.

Un système possède une symétrie sphérique, il a les propriétés suivantes :

- ✓ Tout axe issu du centre de masse est un axe de symétrie et donc est un axe principal d'inertie
- ✓ Tout repère ayant le centre de masse comme origine est un repère principal d'inertie
- ✓ Sa matrice d'inertie en l'origine du système est sous la forme suivante :

$$\Pi_O(S) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}_{(x,\,y,\,z)}$$

Remarque

Axe de révolution : Axe de révolution est une droite autour de laquelle tourne une figure pour créer ainsi une autre figure dans l'espace, exemples

- ❖ L'axe de révolution d'un cylindre est la droite passant par les centres de ses bases. Cet axe est perpendiculaire aux bases.
- ❖ L'axe de révolution d'un cône est la droite passant par sa tête par le centre sa base. Cet axe est perpendiculaire à la base.
- ❖ L'axe de révolution d'une sphère est son diamètre

Exercice d'application 1

On considère une plaque plane rectangulaire de masse M et de cotés a et b (figure 7), et son origine est confondu avec celui du repère $\Re(O, x, y, z)$.

1) Montrer que le repère $\Re(O, x, y, z)$ est un repère principal de la plaque.
2) Calculer la matrice d'inertie de la plaque en centre O et dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

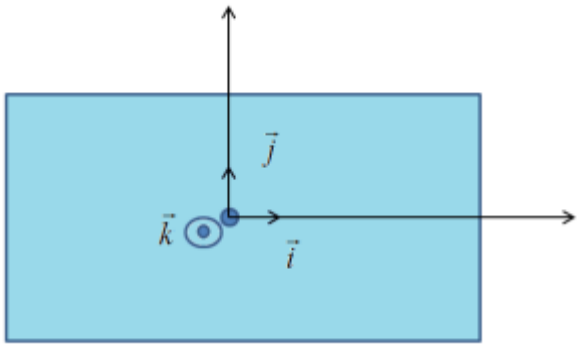

Figure 7 : Plaque rectangulaire

Exercice d'application 2

On considère un cylindre **plein** homogène de centre O, de rayon R, de hauteur h et de masse M (figure 7- a), et un disque de centre O, rayon R et de masse M (figure 7- b).

1) Calculer la matrice d'inertie du cylindre et celle de disque en centre O et dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

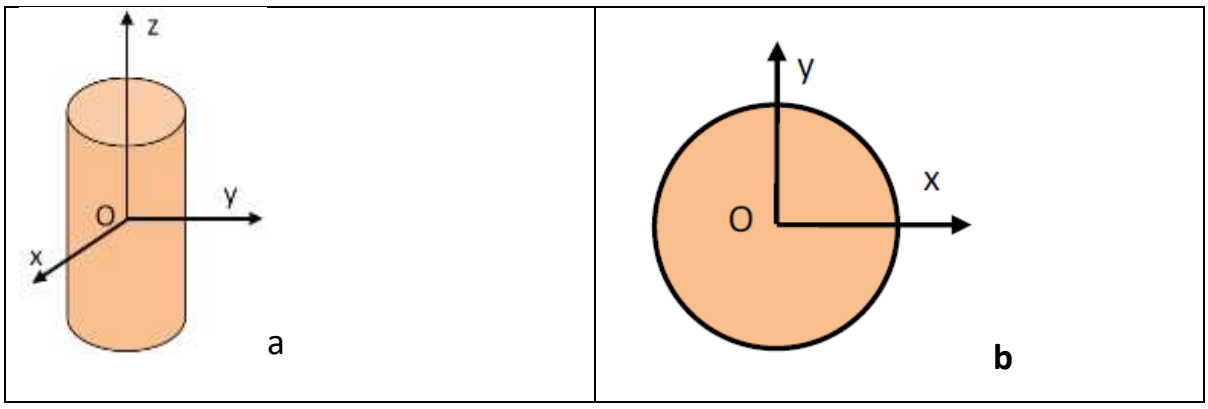

Figure 8 : (a) Cylindre de centre O, de rayon R et de hauteur h, (b) un disque de centre O et rayon R

Exercice d'application 3

Une tige [AB] homogène de centre O, de longueur L et de masse M, Figure 8

1) Calculer la matrice d'inertie de la tige en centre O et dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2) Calculer la matrice d'inertie de la tige en extrémité A et dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

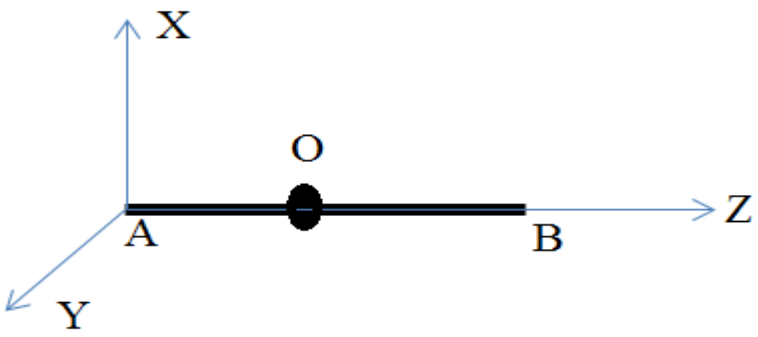

Figure 9 : Tige [AB] de centre O et de longueur L

Exercice d'application 3

(S) est une sphère **pleine** de centre O, rayon R et de masse M. Figure 9.

Calculer la matrice d'inertie de la sphère en son centre O et dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

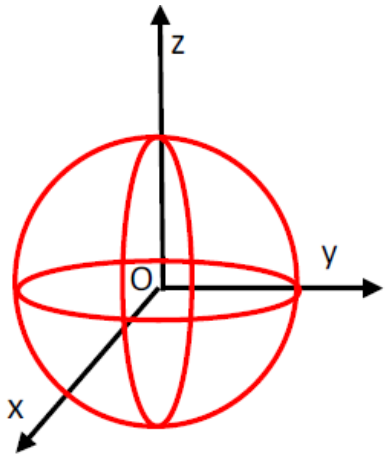

Figure 9 : Sphère pleine de centre O et rayon R